Gamme Pythagoricienne

Gonzalo E. Reyes
Université de Montréal

24 Mai 2013

L'école pythagoricienne (VIe siècle av. J.-C.) a developpé une gamme musicale construite sur la base des accords les plus consonants, c'est à dire, ceux qui correspondent aux rapports de nombres entiers les plus simples sur le monocorde (instrument musical ayant une seule corde): l'octave, de rapport 1/2 lorsque la corde est partagée en deux et la corde vibre sur la moitié de son extension, la quinte, de rapport 2/3 quand la corde vibre sur les deux tiers de son extension et la quarte, de rapport 3/4 quand la corde vibre sur trois quarts de son extension.

Nous emploierons plutôt les fréquences, qui sont inversement proportionnelles aux longueurs. En partant d'une fréquence de la note de la corde entière, la fréquence de l'octave est le double, celle de la quinte est 3/2 et celle de la quarte est 4/3, de la fréquence du départ. Parmi celles-ci, la quinte était considérée la plus consonante après l'octave, suivie de la quarte.

La gamme pythagoricienne, étalée sur une octave, admet seulement la quinte, la quarte et l' octave comme consonantes de la fréquence de départ. Pour la décrire, nous représentons les notes par des fractions entre 1 et 2 (1 inclus, 2 exclus) correspondant à la fraction de la fréquence du départ. Par exemple, la quinte est représentée par la fraction 3/2, la quarte par 4/3, la fréquence de départ par 1. L'octave (de fréquence 2) sort de l'octave du départ.

La gamme s'obtient par superposition ou itération des quintes: en partant de 1 on obtient $QUIN^1 = 3/2$. Si on prend la quinte de celle-ci, on obtient $3/2 \times 3/2 = 3^2/2^2 = 9/4$. Comme celle-si est plus grande que 2, on la ramène a notre octave en divisant par 2. En employant cette règle simple, on obtient les itérations suivantes: $QUIN^2 = 3^2/2^3 = 9/8 = 1.125$. La quinte de celle-ci est $QUIN^3 = 3^3/2^4 = 27/16 = 1.688$. Pour nommer ces notes, on fait la convention que les notes plus importantes (fondamentales) sont celles obtenues par les premières itérations. On donnera les noms suivants aux 6 premières notes (copiés de notre gamme tempérée; les autre noms seront expliqués plus tard.

$$
\begin{array}{l}
do = QUIN^0 = 1.000 \\
sol = QUIN^1 = 3/2 = 1.500 \\
re = QUIN^2 = 3^2/2^3 = 9/8 = 1.125 \\
la = QUIN^3 = 3^3/2^4 = 27/16 = 1.688 \\
mi = QUIN^4 = 3^4/2^6 = 81/64 = 1.266 \\
si = QUIN^5 = 3^5/2^7 = 243/128 = 1.898 \\
fa\# = QUIN^6 = 3^6/2^9 = 729/512 = 1.424 \\
do\# = QUIN^7 = 3^7/2^{11} = 1.068 \\
sol\# = QUIN^8 = 3^8/2^{12} = 1.602 \\
re\# = QUIN^9 = 3^9/2^{14} = 1.201 \\
la\# = QUIN^{10} = 3^{10}/2^{15} = 1.802 \\
mi\# = QUIN^{11} = 3^{11}/2^{17} = 1.352 \\
QUIN^{12} = 3^{12}/2^{19} = 1.014 \\
\ldots\ldots
\end{array}
$$

Cette liste est infinie (voir Appendice: Proposition 7). Pire encore, l'ensemble des quintes de l'octave est un ensemble dense dans l'intervalle [1,2] (voir Appendice: Théorème 11). Ceci veut dire qu'entre deux fréquences quelconques, aussi près soient-elles l'une de l'autre, il y a une quinte. Donc, pour chaque fréquence, il y a une infinité de quintes qui s'agglutinent autour d'elle, en s'approchant de plus en plus d'elle. On remarque, cependant, que $QUIN^{12} = 3^{12}/2619 = 1.014$ est tout près du point de départ. Nous allons approcher sa valeur à 1. L'erreur commise est approximativement 1.36%. Il y aura certaines difficultés qui sont inévitables comme conséquence de cette approximation.

D'autre part, le fa, qui est la quarte du do, n'apparaît pas dans la liste de ces 12 notes. En effet, le fa n'est pas une quinte. Plus généralement, le fa n'est pas de la forme $3^m/2^n$. En effet, si tel était le cas, on aurait $4/3 = 3^m/2^n$, ou $4 \times 2^n = 3^{m+1}$, ce qui est une contradiction, car le terme de gauche est pair, tandis que celui de droite est impair. Mais nous observons que la quinte de notre liste qui s'approche le plus du fa, c'est à dire, à 4/3=1.333 est $mi\# = 1.352$. On va remplacer $mi\#$ par fa. ll y a alors 11 quintes différentes et une quarte (fa) dans l'octave [1,2), que nous ordonnons par grandeur

$$QUIN^0 < QUIN^7 < QUIN^2 < QUIN^9 < QUIN^4 < 4/3 < QUIN^6$$
$$< QUIN^1 < QUIN^8 < QUIN^3 < QUIN^{10} < QUIN^5$$

En regardant les quotients entre deux fractions consécutives, on s'aperçoit qu'il y en a seulement deux: le plus petit est $l = 2^8/3^5 = 1.0535$ (appelé *limma* par les pythagoriciens) et le plus grand est $a = 3^7/2^{11} = 1.0679$ (qu'ils appelaient *apotome*.) Nous allons introduire toute de suite d'autres termes qui apparaîtront par la suite:

$$\begin{cases} c = comma = 3^{12}/2^{19} = 531,441/524,288 = 1.014 \\ l = limma = 2^8/3^5 = 256/243 = 1.054 \\ a = apotome = 3^7/2^{11} = 2,187/2,048 = 1.068 \\ t = ton = a \times l = 3^2/2^3 = 9/8 = 1.125 \end{cases}$$

Le ton est aussi le quotient entre la quinte et la quarte: $t = (3/2)/(4/3) = 9/8$. Le comma est le quotient entre l'apotome et le limma, i.e., $c = a/l$.

Entre t et l il y a cette relation fondamentale

$$t^5 l^2 = 2$$

Nous allons construire une octave avec les 7 notes dites fondamentales suivantes: $do, re, mi, fa, sol, la, si$. On peut les représenter par leur position dans l'intervalle [1,2) qui est divisé en 7 parties par t et l: 5 longues (t) et 2 courtes (l)

$$\begin{array}{cccccccccccccc} do & \underbrace{\ldots\ldots}_{t} & re & \underbrace{\ldots\ldots}_{t} & mi & \underbrace{\ldots}_{l} & fa & \underbrace{\ldots\ldots}_{t} & sol & \underbrace{\ldots\ldots}_{t} & la & \underbrace{\ldots\ldots}_{t} & si & \underbrace{\ldots}_{l} \end{array}$$

Tel que mentionné, la note fa est en effet une quarte: le rapport avec do est de 4/3. Nous pouvons définir les quartes par itération. En partant de 1 on obtient la quarte 4/3. En prenant la quarte de celle-ci, on obtient $2^4/3^2$. La quarte de celle-ci est $2^6/3^3$. Comme celle ci est plus grande que 2, on la ramène à l'octave en divisant par 2. On obtient donc $2^5/3^3$. Pour continuer la liste on emploie la relation

$$QUAR^m \times QUIN^m = 2$$

(voir Appendice: Corollaire 6).

On peut aussi démontrer que les quartes sont denses dans l'intervalle [1,2]. (Voir Appendice: Theoreme 8).

$$
\begin{aligned}
&fa = QUAR^1 = 2^2/3^1 = 1.333\\
&si\,\flat = QUAR^2 = 2^4/3^2 = 1.778\\
&mi\,\flat = QUAR^3 = 2^5/3^3 = 1.185\\
&la\,\flat = QUAR^4 = 2^7/3^4 = 1.580\\
&re\,\flat = QUAR^5 = 2^8/3^5 = 1.053\\
&sol\,\flat = QUAR^6 = 2^{10}/3^6 = 1.405\\
&do? = QUAR^7 = 2^{12}/3^7 = 1.873\\
&fa\,\flat = QUAR^8 = 2^{13}/3^8 = 1.249\\
&si? = QUAR^9 = 2^{15}/3^9 = 1.665\\
&mi? = QUAR^{10} = 2^{16}/3^{10} = 1.110\\
&la? = QUAR^{11} = 2^{18}/3^{11} = 1.480\\
&re? = QUAR^{12} = 2^{20}/3^{12} = 1.973\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

La gamme de 7 notes fondamentales est très grossière et il faut introduire des notes intermédiaires. Pour y arriver, on stipule les principes suivantes:

1): On place d'abord les 10 quintes et la quarte fa de l'intervalle $QUIN^1, QUIN^2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
&do = QUIN^0 = 1.000\\
&sol = QUIN^1 = 3/2 = 1.500\\
&re = QUIN^2 = 3^2/2^3 = 9/8 = 1.125\\
&la = QUIN^3 = 3^3/2^4 = 27/16 = 1.688\\
&mi = QUIN^4 = 3^4/2^6 = 81/64 = 1.266\\
&si = QUIN^5 = 3^5/2^7 = 243/128 = 1.898\\
&fa\# = QUIN^6 = 3^6/2^9 = 729/512 = 1.424\\
&do\# = QUIN^7 = 3^7/2^{11} = 1.068\\
&sol\# = QUIN^8 = 3^8/2^{12} = 1.602\\
&re\# = QUIN^9 = 3^9/2^{14} = 1.201\\
&la\# = QUIN^{10} = 3^{10}/2^{15} = 1.802\\
&fa = 4/3
\end{aligned}
$$

2): On place les quartes en partant de fa=$QUAR^1, QUAR^2, \ldots$ avec la convention que seulement les quartes x dont les quotients de x par une note déjà placée ou d'une note déjà placée par x soit c, (le comma pythagoricien) ou l (le lima pythagoricien).

De cette façon on obtient 7 notes en donnant des noms qu'on expliquera plus bas.

$$
\begin{array}{l}
fa = QUAR^1 = 2^2/3^1 = 1.333 \\
si \flat = QUAR^2 = 2^4/3^2 = 1.778 \\
mi \flat = QUAR^3 = 2^5/3^3 = 1.185 \\
la \flat = QUAR^4 = 2^7/3^4 = 1.580 \\
re \flat = QUAR^5 = 2^8/3^5 = 1.053 \\
sol \flat = QUAR^6 = 2^{10}/3^6 = 1.405 \\
fa \flat = QUAR^8 = 2^{13}/3^8 = 1.249
\end{array}
$$

Pour expliquer les noms, on définit (par analogie avec notre gamme tempérée), les dièses et les bémols des notes de la gamme de 7 notes de la façon suivante:

$$
\begin{cases}
do \# = do \times a \\
re \# = re \times a \\
fa \# = fa \times a \\
sol \# = sol \times a \\
la \# = la \times a
\end{cases}
$$

On remarquera qu'on n'a pas defini $si \#$, car $si \times a$ sort de l'octave et que $mi\#$ a été déjà identifié à fa. De la même façon on peut définir les bémols des notes fondamentales ainsi:

$$
\begin{cases}
re \flat = re/a \\
mi \flat = mi/a \\
fa \flat = fa/a \\
sol \flat = sol/a \\
la \flat = la/a \\
si \flat = si/a
\end{cases}
$$

On remarquera qu'on ne définit pas $do \flat$ car do/a sort de l'octave.

De plus, en regardant le tableau suivant, on peut remarquer que les notes avec $\#$ sont des quintes, tandis que les notes avec $\flat$ sont des quartes.

Par convention, on pose la fréquence du la comme étant 440 Hz (le choix de la gamme tempérée). On fera la même convention pour la gamme pythagoricienne pour obtenir la table de 18 notes:

Note	Rapport avec do_3	Note in terms of a,l,t	Fréquence
do_3	1/1=1	t^0	260.74
$re \flat$	$2^8/3^5 = 1.053$	l	274.69
$do \#$	$3^7/2^{11} = 1.068$	a	278.44
re	$3^2/2^3 = 1.125$	$t = al$	293.33
$mi \flat$	$2^5/3^3 = 1.185$	tl	309.03
$re \#$	$3^9/2^{14} = 1.201$	at	313.24
$fa \flat$	$2^{13}/3^8 = 1.249$	tl^2	325.56
mi	$3^4/2^6 = 1.266$	t^2	330
fa	$2^2/3^1 = 1.333$	t^2l	347.65
$sol \flat$	$2^{10}/3^6 = 1.405$	t^2l^2	366.25
$fa \#$	$3^6/2^9 = 1.424$	t^3	371.25
sol	$3^1/2^1 = 1.5$	t^3l	391.11
$la \flat$	$2^7/3^4 = 1.580$	t^3l^2	412.03
$sol \#$	$3^8/2^{12} = 1.602$	t^4	417.66
la	$3^3/2^4 = 1.688$	t^4l	440
$si \flat$	$2^4/3^2 = 1.778$	t^4l^2	463.54
$la \#$	$3^{10}/2^{15} = 1.802$	t^5	469.86
si	$3^5/2^7 = 1.898$	t^5l	495.00
do_4	2/1=2.000	t^5l^2	521.48

En regardant les quotients entre deux notes consécutives, on peut voir qu'il y en a trois: le comma, le limma, et un nouveau quotient $l/c = 2^{27}/3^{17} = 1.039$ qui se trouve donc entre le comma et le limma, ce qui contredit la convention 2). Ce dernier apparait une fois seulement: comme le quotient $fa \flat / re \#$. Pour garder la convention 2), on laisse de côté $fa \flat$. En faisant ceci, on obtient une octave de 17 notes appelée **Gamme Pythagoricienne Majeure**:

Gamme Pythagoricienne Majeure: Notes, Fréquences...			
Note	**Rapport avec do$_3$**	**note/precedente**	**Fréquence**
do_3	$1/1{=}1{=}t^0$	-	260.74
re ♭	$2^8/3^5 = 1.053 = l$	l	274.69
do #	$3^7/2^{11} = 1.068 = a$	c	278.44
re	$3^2/2^3 = 1.125 = t$	l	293.33
mi ♭	$2^5/3^3 = 1.185 = tl$	l	309.03
re #	$3^9/2^{14} = 1.201 = at$	c	313.24
mi	$3^4/2^6 = 1.266 = t^2$	l	330
fa	$2^2/3^1 = 1.333 = t^2l$	l	347.65
sol ♭	$2^{10}/3^6 = 1.405 = t^2l^2$	l	366.25
fa #	$3^6/2^9 = 1.424 = t^3$	c	371.25
sol	$3^1/2^1 = 1.5 = t^3l$	l	391.11
la ♭	$2^7/3^4 = 1.580 = t^3l^2$	l	412.03
sol #	$3^8/2^{12} = 1.602 = t^4$	c	417.66
la	$3^3/2^4 = 1.688 = t^4l$	l	440
si ♭	$2^4/3^2 = 1.778 = t^4l^2$	l	463.54
la #	$3^{10}/2^{15} = 1.802 = t^5$	c	469.86
si	$3^5/2^7 = 1.898 = t^5l$	l	495.00
do_4	$2/1 = 2.000 = t^5l^2$	l	521.48

Il y a seulement deux quotients entre notes consécutives: le comma c et le limma l. Il y a 12 l et 5 c. La relation entre les deux est

$$l^{12}c^5 = 2$$

On peut remarquer que les 17 notes peuvent se représenter en termes de c et l, car $a = cl$ et $t = al = cl^2$. Cependant, il y a de quintes et de quartes qui ne peuvent pas se représenter de cette façon. On peut donner des conditions nécessaires et suffisantes pour représenter une quinte et une quarte comme produit de puissances positives de c et l. (Voir Appendice: Propositions 9,10).

La quinte du loup: Le relation entre les quintes et les quartes déjà formulée, nous donnent: $QUIN^{11} \times QUAR^{11} = 2$. On peut remarquer que $QUAR^{11} = 2^{18}/3^{11} \sim 1.48$, un nombre qui est près de la quinte de do. Cette "fausse quinte" on l'appelle *quinte du loup*. Elle sonne faux et on dit qu'elle hurle, d'où son nom.

Une façon alternative de voir l'apparition de la quinte du loup, c'est de regarder les quintes sans les rapporter à l'octave. Aucune quinte ne peut égaler un nombre juste de k d'octaves avec $k \neq 0$. Si non, on aurait $3^m/2^n = 2^k$, ce qui implique que $3^m = 2^{n+k}$. Mais ceci est une contradiction, car le terme de droite est pair, tandis que celui de gauche est impair.

Cependant, les 12 quintes: $3/2 = (3/2)^1, 3/2(3/2) = (3/2)^2, \ldots (3/2)^{12}$ s'étalent sur 7 octaves, en les dépassant un peu. En effet, la dernière, $(3/2)^{12} = 129.75$ depasse un peu $2^7 = 128$. Le rapport entre les deux est $(3/2)^{12}/2^7 = 3^{12}/2^{19} = 1.01364$, c'est-à-dire le comma. Si au lieu de prendre les 12 quintes, on prend seulement 11 et la quinte du loup, on obtient $(3/2)^{11} \times 2^{18}/3^{11} = 2^7$, c'est a dire 7 octaves justes.

Il y a des musiciens qui préfèrent utiliser des octaves pures. Ils accordent leur instrument sur une gamme pythagoricienne en rapportant la quinte du loup dans un intervalle peu utilisé tel $sol_3\#$-$mi_4\flat$. (En effet, le rapport entre ces deux notes est $(2^6/3^3)/(2^{12}/3^8) = 2^{18}/3^{11} \sim 1.480$, la quinte du loup, obtenue en rapetissant d'un comma l'intervalle de quinte juste $sol_3\#$-$re_4\#$.) Les intervalles englobant la quinte du loup sonneront faux aussi, il faut donc soigneusement l'éviter.

1 Appendice

Pour résoudre des problèmes de type mathématique nous allons définir deux fonctions: QUIN (quinte) et QUAR (quarte) $QUIN, QUAR : [1,2) \longrightarrow [1,2)$ de la façon suivante:

$$QUIN(\alpha) = \begin{cases} (3/2)\alpha & \text{si } \alpha < 4/3 \\ (3/4)\alpha & \text{si } \alpha \geq 4/3 \end{cases} \quad QUAR(\alpha) = \begin{cases} 2/3\alpha & \text{si } \alpha \geq 3/2 \\ 4/3\alpha & \text{si } \alpha < 3/2 \end{cases}$$

On peut remarquer que ce que nous avons appelé $QUIN$ dans le texte correspond ici à $QUIN(1)$.

Proposition 1:

$$\begin{cases} QUAR \circ QUIN = Id \\ QUIN \circ QUAR = Id \end{cases}$$

Preuve: La preuve suit des inégalités $1 < 9/8 < 4/3 < 3/2 < 16/9 < 2$. On considère 3 cas: $1 \leq \alpha < 4/3$, $4/3 \leq \alpha < 3/2$, $3/2 \leq \alpha < 2$ et on calcule $QUAR \circ QUIN$ et $QUIN \circ QUAR$ dans chaque segment.

NB *On remarque que* $QUIN^m \circ QUAR^m = QUAR^m \circ QUIN^m = Id$ *(simple induction)*

Proposition 2: Les conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{cases} 1 \leq 3^m/2^n < 2 \\ n \leq m\gamma < n+1 \end{cases}$$

où $\gamma = log\ 3/log\ 2 = 1.5849625007\ldots$.

Preuve: Immédiate, en prenant les logaritmes (dans la première condition) et en divisant par log 2.

Une conséquence immédiate de cette proposition est que n est une fonction ϕ de m. En effet, $\phi(m)$=partie entière de $m\gamma$.

On remarque que γ est irrationnel: si non, $log\ 3/log\ 2 = p/q$, ce qui implique $q\ log\ 3 = p\ log\ 2$, i.e $3^q = 2^p$. Mais le premier membre est impair, tandis que le deuxième est pair, contradiction.

Corollaire 3: $QUIN^m(1) = 3^m/2^{\phi(m)}$

Preuve: Immédiate du fait que toutes les itérations se trouvent dans l'octave du départ $[1, 2)$.

On peut tirer une information supplémentaire en remarquant que

(i) si $3^m/2^{\phi(m)} < 4/3$, $QUIN(3^m/2^{\phi(m)}) = 3/2(3^m/2^{\phi(m)}) = 3^{m+1}/(2^{\phi(m)+1})$.

(ii) si $3^m/2^{\phi(m)} \geq 4/3$, $QUIN(3^m/2^{\phi(m)}) = 3/4(3^m/2^{\phi(m)}) = 3^{m+1}/(2^{\phi(m)+2})$.

Cette remarque montre que dans le premier cas, $\phi(m+1) = \phi(m) + 1$ et dans le deuxième, $\phi(m+1) = \phi(m) + 2$.

De la même façon on peut démontrer

Proposition 4: Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\begin{cases} 1 \leq 2^n/3^m < 2 \\ m\gamma \leq n < m\gamma + 1 \end{cases}$$

Corollaire 5: $QUAR^m(1) = 2^{\phi(m)+1}/3^m$.

Corollaire 6: $QUAR^m(1) \times QUIN^m(1) = 2$

Preuve: $QUAR^m(1) = 2^{\phi(m)+1}/3^m = 2 \times (2^{\phi(m)}/3^m) = 2/QUIN^m(1)$.

NB *On peut élargir la définition de* $QUIN^m$ *et* $QUAR^m$ *pour tout* $m \in \mathbb{Z}$ *en définissant* $QUIN^{-m} = QUAR^m/2$ *et* $QUAR^{-m} = QUIN^m/2$.

Proposition 7: Il y a une infinité de quintes de la forme $3^m/2^{\phi(m)}$. Il y a aussi une infinité de quartes de la forme $2^{\phi(m)+1}/3^m$.

Preuve: Immédiate par le théorème fondamental de lArithmétique.

Table de la fonction ϕ. Rappel: $\phi(m) < m\gamma < \phi(m) + 1$

$\phi(m)$	$\phi(m)/m$	$\gamma - \phi(m)/m$
$\phi(0) = 0$	$-$	$-$
$\phi(1) = 1$	1.0000	0.5849
$\phi(2) = 3$	1.5000	0.0849
$\phi(3) = 4$	1.3333	0.2516
$\phi(4) = 6$	1.5000	0.0849
$\phi(5) = 7$	1.4000	0.1849
$\phi(6) = 9$	1.5000	0.1849
$\phi(7) = 11$	1.5714	0.0135
$\phi(8) = 12$	1.5000	0.1849
$\phi(9) = 14$	1.5556	0.0293
$\phi(10) = 15$	1.5000	0.1849
$\phi(11) = 17$	1.5455	0.0394
$\phi(12) = 19$	1.5833	0.0016
$\phi(13) = 20$	1.5385	0.0464
$\phi(14) = 22$	1.5714	0.0135
$\phi(15) = 23$	1.5333	0.0516
$\phi(16) = 25$	1.5625	0.0224
$\phi(17) = 26$	1.5294	0.0555
$\phi(18) = 28$	1.5556	0.0293
$\phi(19) = 30$	1.5790	0.0060
$\phi(20) = 31$	1.5500	0.0349
$\phi(21) = 33$	1.5714	0.0135
$\phi(50) = 79$	1.5800	0.0049
$\phi(100) = 158$	1.5800	0.0049
$\phi(70) = 110$	1.5714	0.0135
$\phi(10,124) = 16,046$	1.5849	0.000016

Proposition 8: $lim_{m \to \infty} \phi(m)/m = \gamma$

Preuve: On doit montrer

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n \; \forall m > n \; |\gamma - \phi(m)/m| < \epsilon$$

Soit $\epsilon > 0$. Prenons n'importe quel entier $n > 1/\epsilon$. Soit $m > n$. À partir de $\phi(m) < m\gamma < \phi(m) + 1$ on conclut (en divisant par m la deuxième inégalité) que $\gamma < \phi(m)/m + 1/m$, ou encore $0 < \gamma - \phi(m)/m < 1/m < \epsilon$. Mais d'ici, on tire $-\epsilon < -1/m < \gamma - \phi(m)/m < 1/m < \epsilon$, autrement dit,

$$|\gamma - \phi(m)/m| < \epsilon$$

Représentation de quintes et de quartes en terms de c et l.

Proposition 9: La condition nécesaire et suffisante pour qu'une quinte $3^p/2^{\phi(p)}$ puisse se représenter comme produit de puissances positives de c et l est que $\phi(p) \leq (19/12)p$.

Preuve: Écrivons $3^p/2^{\phi(p)} = c^m l^n = (3^{12}/2^{11})^m (2^8/3^5)^n$. Alors, par le théorème fondamental de l'Arithmétique,

$$\begin{cases} 12m - 5n = p \\ 19m - 8n = \phi(p) \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$\begin{cases} m = 8p - 5\phi(p) \\ n = 19 - 12\phi(p) \end{cases}$$

Mais comme $m, n \geq 0$ on doit avoir $8p - 5\phi(p) \geq 0$ et $19 - 12\phi(p) \geq 0$. Mais la première inégalité découle de la deuxième. On a donc la seule condition $19 - 12\phi(p) \geq 0$, c'est-à-dire $\phi(p) \leq (19/12)p$. Si on regarde le tableau de la fonction ϕ, on voit que pour toutes les quintes apparaissant dans la tableau de la Gamme Pythagoricienne Majeure, cette condition est remplie. Ceci est (évident d'ailleurs par le tableau même). D'autre part, supposons qu'il y a une infinité de p's tels que $\phi(p) \leq (19/12)p$. Alors la sous-séquence définie par ces p's a la limite $lim\ \phi(p)/p = \gamma \leq 19/12$, ce qui contredit la Proposition 6. Déjà p=1,000 ne satisfait pas cette inégalité, car $\phi(p) = 1,584 > 1,583.33 = (19/12)p$. Ces quintes ne peuvent pas s'écrire comme produit de puissances positives de c et l.

NB *Si on laisse de côté la condition d'avoir des puissances positives seulement, alors toutes les quintes peuvent s'écrire comme produit de puissances (peut-être négatives) de c et l. Une remarque semblable s'applique aux quartes.*

D'une façon tout à fait analogue on procède avec les quartes pour obtenir

Proposition 10: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une quarte $2^{\phi(p)+1}/3^p$ puisse se représenter comme un produit de puissances positives de c et l est que $\phi(p) + 1 \geq (8/5)p$.

Comme pour les quintes, toutes les quartes du tableau des 17 notes sont ainsi représentables, mais il y a seulement un nombre fini de notes satisfaisant cette inégalité. (Argument analogue à celui des quintes). Un exemple qui ne satisfait pas cette inégalité est: $p = 67$. En effet, $\phi(p) = 106$ et $\phi(p) + 1 = 107 < (8/5)p = 107.200$.

Densité de quintes et de quartes

Théorème 11: Les quintes (et les quartes) sont denses dans [1,2].

Preuve: (prise essentiellement de [2] et des références indiquées)

Par la Proposition 2, on peut reformuler la densité des quintes dans l'intervalle [1,2] comme la densité des réels de la forme $\{m\gamma\}$=la partie fractionnelle de $m\gamma$, dans [0,1].

Les propriétés suivantes de la fonction $\{\ldots\}$ sont évidentes et seront employées implicitement dans la preuve

(i) $\{r\} = 0$ si et seulement si r est un nombre naturel
(ii) $0 < r < 1$ si et seulement si $r = \{r\}$
(iii) Si $0 < a, b$ alors
$\{b - a\} = \{b\} - \{a\}$ si $a \leq b$
$\{a + b\} = \{a\} + \{b\}$ si $\{a\} + \{b\} < 1$
(iv) Si $N\{a\} < 1,$ alors $N\{a\} = \{Na\}$

Montrons d'abord qu'il y a une infinité de réels de la forme $\{m\gamma\}$. En effet, soit $\{p\gamma\} = \{q\gamma\}$, et $q \neq p$. On peut supposer que $q > p$. De $\{(q - p)\gamma\} = 0$ on conclut que $(q - p)\gamma$ est un nombre naturel, disons l. Mais ceci implique que $\gamma = l/(q - p)$, est un nombre rationnel, contradiction.

Soit m un entier arbitraire et $x \in [0, 1]$. Alors $x \in [n/m, n+1/m]$. L'entier m divise l'intervalle [0,1] dans m intervalles de longueur 1/m. Si on place les m+1 nombres réels $0, \{\gamma\}, \{2\gamma\}, \ldots, \{m\gamma\}$ dans ces intervalles, il doit y avoir un intervalle, disons [k/m,k+1/m], qui contient au moins deux de ces nombres réels, disons $\{i\gamma\}$ et $\{j\gamma\}$, par le principe de "pigeonhole".

Supposons que $j > i$. On a donc $k/m \leq \{i\gamma\}, \{j\gamma\} < k + 1/m$. La différence entre ces deux réels est donc $r = \{j\gamma\} - \{i\gamma\} = \{(j-i)\gamma\} < 1/m$.

Soit N le plus grand entier tel que $Nr < k/m$. Alors $(N+1)r < (k+1)/m < 1$. Si non, $(N+1)r \geq (k+1)/m$ et la distance entre Nr et $(N+1)r$, c'est-à-dire r est plus grand que la longueur de l'intervalle [k/m,(k+1)/m], qui est 1/m. On aurait donc que $r > 1/m$, une contradiction.

Mais ceci implique que $k/m \leq (N+1)r < (k+1)r$, car, l'inégalité $k/m > (N+1)r$, est exclusе par le choix de N. Donc $|x - (N+1)r| = |x - \{(N+1)(j-i)\gamma\}| < 1/m$.

On remarquera que la seule propriété qu'on a employée est que γ est irrationnel. La preuve démontre alors que les réels de la forme $m\{\alpha\}$ où α est irrationnel sont denses dans [0,1].

La densité des quartes dans [1,2] est maintenant immédiate: soit $a < b$ dans l'intervalle [1,2]. Alors, par la densité des quintes, il existe une quinte $3^m/2^{\phi(m)}$ dans l'intervalle $(2/b, 2/a)$. En prenant des inverses et en multipliant par 2, on obtient la quarte $2^{\phi(m)+1}/3^m$ dans l'intervalle $(a, b.)$

La Gamme Pythagoricienne et le Timée de Platon

Le Timée est un des derniers dialogues du Platon, écrit une douzaine d'années avant sa mort. Le dialogue décrit la genèse du monde et de l'homme et révèle la grande influence de Pythagore. Dans cette section, nous suivrons surtout l'exposé de F.M.Cornford dans [0].

Après une description de la composition de l'âme du monde, consistant en un mélange dont les constituants sont certaines sortes d'Existence, d'Egalité et de Différence, Platon décrit comment le Demiurge divise ce mélange dans les proportions d'une *harmonia* musicale.

Platon imagine que le Demiurge prend d'abord deux progressions géométriques, qu'il considère comme étant les plus parfaites parmi les progressions, de raisons 2 et 3 :

$$\begin{cases} 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots \\ 1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots \end{cases}$$

NB Le choix des progressions géométriques nous semble aujourd'hui assez arbitraire. La raison de ce choix est donnée par Timée (voir [3]): *"Mais* *il est impossible à deux choses de bien se joindre l'une à l'autre, sans une troisième : il faut qu'il y ait au milieu un lien qui rapproche les deux bouts, et le plus parfait lien est celui qui de lui-même et des choses qu'il unit, fait un seul et même tout. La proportion* [progression géométrique] *atteint parfaitement ce but. Car, lorsque de trois nombres, soit trois masses ou trois forces quelconques, le moyen est au dernier ce que le premier est au moyen et au premier ce que le dernier est au moyen, et si le moyen devient le premier et le dernier, et que le premier et le dernier deviennent les moyens, il arrive nécessairement que tout est le même, et que tout étant dans le même rapport, tout est un comme auparavant."* [Une progression géométrique est donc donnée par ses premiers 3 termes].

Platon donne une recette pour construire toutes les progressions géomét riques dont la raison est un nombre naturel et dont le premier terme est 1, à partir de la progression géométrique la plus simple: 1,1,1,.... Si (a,b,c) sont les premiers termes d'une progression géométrique, on définit le successeur de celle-ci [notre mot, qui ne se trouve pas dans Platon] comme étant la progression géométrique dont les trois premiers termes sont : $(a, a+b, a+2ab+c)$. Il est facile de voir que si la raison de la première est r, alors la raison de la deuxième est $1+r$. En partant de la plus simple, on obtient son successeur et le successeur du successeur ainsi:

$$\begin{array}{c} 1, 1, 1, \ldots \\ 1, 2, 4, \ldots \\ 1, 3, 9, \ldots \end{array}$$

Dans la terminologie de successeurs, le successeur de la plus simple 1,1,1,... est la progression géométrique de raison 2: 1,2,4,8,... et le successeur de celle-ci est la progression géométrique de raison 3.

Entre deux termes successifs de chacune des progressions géométriques de raison 2 et 3, il intercale la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique de ces termes.

On rappelle que ces moyennes sont définies de la façon suivante

$$\begin{cases} \text{Moyenne harmonique de } a \text{ et } b = H(a,b) = 2ab/(a+b) \\ \text{Moyenne arithmétique de } a \text{ et } b = A(a,b) = (a+b)/2 \end{cases}$$

En intercalant ces deux moyennes dans les deux progressions, on a pour les premiers 4 termes de chaque progression:

1		2		4		8
	4/3, 3/2		8/3, 3		16/3, 6	

1		3		9		27
	3/2, 2		9/2, 6		27/2, 18	

Écrivons maintenant chaque progression, avec les moyennes intercalées, dans une suite. On a donc

Progression de raison 2 avec moyennes: $1, 4/3, 3/2, 2, 8/3, 3, 4, 16/3, 6, 8$
Progression de raison 3 avec moyennes: $1, 3/2, 2, 3, 9/2, 6, 9, 27/2, 18, 27$

On remarque que le quotient entre deux termes consécutifs est soit 3/2 (quinte), soit 4/3 (quarte), soit 9/8 (ton).

Ensuite, on combine ces progressions, avec ces moyennes intercalées, dans une seule suite strictement croissante, en enlevant les termes répétés

En procédant ainsi, on obtient la suite de 15 termes

$$1, 4/3, 3/2, 2, 8/3, 3, 4, 9/2, 16/3, 6, 8, 9, 27/2, 18, 27$$

Considérons les premiers 4 termes et écrivons en dessus les quotients entre deux termes successifs:

1		4/3		3/2		2
	4/3		9/8		4/3	

On a réussi à diviser l'intervalle [1,2] en deux intervalles de 4/3 et un de 9/8.

Finalement le Demiurge procède à "remplir chacun des intervalles 4/3 (les quartes) avec l'intervalle 9/8 (le ton), laissant une fraction dans chacun." Chaque intervalle de 4/3 peut se remplir avec 2 tons, laissant comme reste un intervalle $2^8/3^5$ (le limma pythagoricien), car $4/3 = t^2 l$. On a divisé donc l'intervalle [1,2] en 5 tons et 2 limmas. Autrement dit, on obtient exactement la gamme heptatonique pythagoricienne: do, re, mi, fa, sol, la, si, par considérations arithmétiques, plutôt que musicales!

On peut se demander pourquoi Platon ne part pas, comme Pythagore avant lui, des quintes et des quartes justes pour former cette gamme. Peut-être parce que ce choix dépend de l'oreille humaine qui ne peut nous informer sur l'harmonie des sphères. L'oreille humaine est sourde à la musique des sphères. Platon veut partir de certains principes mathématiques fondamentaux pour déduire l'harmonie des sphères, principes dignes du Demiurge. C'est un hasard si les deux points de départ, qui semblent tellement différents, donnent le même résultat.

2 Références

[0] F.M.Cornford, *Plato's Cosmology*, The Library of Liberal Arts, The Liberal Arts Press, New York 1957

[1] Gamme Pythagoricienne, dans *Wikipedia*

[2] http://math.stackexchange.com/questions/369336/problem-suggested-by-the-pythagorean-musica-scale.

[3] Oeuvres de Platon traduites par Victor Cousin 1822-1840. Republished by British Library, Historical Print Editions, 2011